Funktionen mit 2 Variablen

Ebenen als Funktionen

Teil 2:

Punkt-Richtungs-Form für Ebenen

Tangentialebenen an Flächen

Datei Nr. 51022

Stand 29. Juni 2012

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Im Gegensatz zur Hochschulmathematik wird hier eine anschauliche Grundlage gelegt.
Es geht um die Erstellung von Tangentialebenen an Flächen.

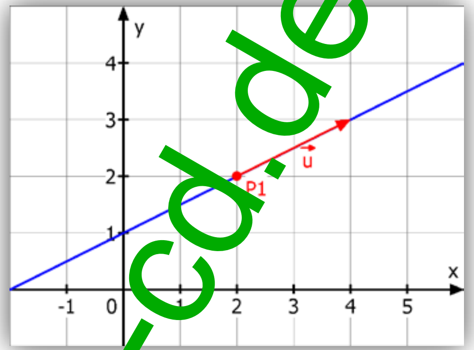
Nach dem anschaulichen Einführungstext in die Vielfalt der Funktionen mit zwei Variablen zeigt ich hier, dass es auch für Ebenen eine **Punkt-Richtungs-Form** gibt. Dies wird in 1.2 ganz anschaulich an einem Beispiel gezeigt. Dar Vergleich mit einer Vektor-Berechnung bestätigt das Ergebnis. Dabei spielen die Steigungen in x-Richtung und in y-Richtung die entscheidende Rolle.
Unter Vorgriff auf die Theorie der Richtungsableitungen im Text 51030 wird gezeigt, wie man aus diesen beiden Steigungswerten die Steigung in jeder beliebigen Richtung berechnen kann.
Im zweiten Abschnitt werden die Richtungsableitungen in x- und y-Richtung zu einer Fläche berechnet. Mit Hilfe der Punkt-Richtungsform erhält man dann die Tangentialebene an einer Stelle $S_1(x_1 \mid y_1)$, d.h. im Punkt $P_1(x_1 \mid y_1 \mid z_1)$ mit $z_1 = f(x_1 \mid y_1)$. Zum Vergleichen wird einige Male diese Tangentialebene mit den Mitteln der Vektorrechnung erstellt. Ich verwende hier einige Funktionen (Flächen), die schon in 51011 gezeigt worden sind. Es wird empfohlen, diesen Text zuvor zu lesen.

Hinweis: Obwohl man die Funktion f mit den Variablen x und y eigentlich so schreibt: $f(x,y)$, verwende ich daneben sehr gerne die Schreibweise $z = f(x \mid y)$ um anzudeuten, dass z der Funktionswert zu einer „Stelle“ $(x \mid y)$ ist, die einem Punkt in der xy-Ebene entspricht, dessen z-Koordinate 0 weggelassen worden ist. Ich denke, dass dies nicht stören sollte, wenn man weiß, was gemeint ist.

Inhalt

1 Punkt-Richtungs-Form einer Ebene

1.1 Punkt-Richtungs-Form einer Geraden im R^2



Dieser kleine Abschnitt dient der Wiederholung.

Gegeben ist eine Punkt $P_1(x_1 \mid y_1)$ der Geraden und ihre Steigung m. Dann stellt

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Die Gleichung dieser Geraden dar.

Beispiel: Welche Gleichung hat g durch $P_1(2 \mid 2)$ mit der Steigung $m = \frac{1}{2}$?

g: $y - 2 = \frac{1}{2} \cdot (x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = \frac{1}{2}x + 1}$.

Die **Herleitung** dieser sogenannten Punkt-Richtungs-Form (Punkt-Steigungs-Form) ist sehr einfach.
Für eine nicht zur y-Achse parallele Gerade, kann man diesen Ansatz machen:

g: $y = m \cdot x + n \qquad (1)$

Geht die Gerade durch den Punkt $P_1(x_1 \mid y_1)$, dann erfüllen dessen Koordinaten die Geradengleichung, man kann sie also einsetzen und erhält

$y_1 = m \cdot x_1 + n \qquad (2)$

Durch Subtraktion (1) – (2) entsteht dann bereits die Punkt-Richtungs-Form:

$y - y_1 = mx - mx_1 \quad \Leftrightarrow \quad y - y_1 = m(x - x_1)$.

Manche geben diese Gleichung auch so an: $y = m(x - x_1) + y_1$.

Eine wichtige Anwendung ist beispielsweise die **Aufstellung einer Tangentengleichung**.
Dazu berechnet man die Tangentensteigung durch die 1. Ableitung: $m = f'(x_1)$.

Allgemeine Tangentengleichung: $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$.

Beispiel: Gegeben ist die Kurve $y = f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x + 1$

Gesucht ist die Tangente an der Stelle $x_1 = 2$.

Ableitung: $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2$

Tangentensteigung: $f'(2) = \frac{3}{2} \cdot 4 - 2 = 4$

Berührpunkt $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$

Tangente: $y = 4 \cdot (x - 2) + 1$ d. h. $\boxed{y = 4x - 7}$

Zu diesen Fakten gibt es eine Analogie bei Ebenen im $\mathbf{R^3}$.

1.2 Punkt-Richtungsform einer Ebene im R^3

Beispiel 1 Die Ebene als Schaubild einer zweidimensionalen Funktion.

Die Ebene E_1 sei gegeben durch ihre Koordinatengleichung $6x+4y+3z=24$

Auflösen nach z: $3z=-6x-4y+24$

$$z=-2x-\tfrac{4}{3}y+8 \qquad (1)$$

Wir bezeichnen jetzt das Zahlenpaar $(x\,|\,y)$ als eine Stelle in der xy-Ebene.

Die Gleichung (1) stellt dann eine Funktion dar, die jeder Stelle einen Funktionswert (z-Wert) zuordnet.

Man schreibt dann auch $z=f(x,y)=-2x-\tfrac{4}{3}y+8$.

Beispiele: $z=f(1,3)=-2\cdot 1-\tfrac{4}{3}\cdot 3+8=-2-4+8=2$

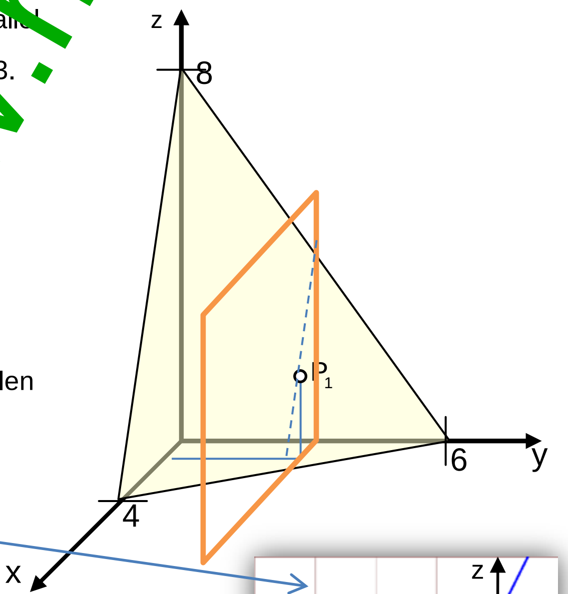
Der Punkt $P_1(1\,|\,3\,|\,2)$ ist ein Punkt des Schaubilds der Funktion, also der Ebene.

$z=f(5,-2)-10+\tfrac{8}{3}+8=\tfrac{2}{3}$

Der Punkt $P_2(5\,|\,-2\,|\,-\tfrac{2}{3})$ ist ein Punkt des Schaubilds der Funktion, der Ebene.

Welche Bedeutung haben die Koeffizienten -2 und $-\tfrac{4}{3}$ dieser Funktion?

Ich schneide dazu die Ebene E_1 mit einer Ebene E_y parallel zur xz-Ebene durch $P_1(1\,|\,3\,|\,2)$. Ihre Gleichung ist $y = 3$.



E: $z=-2x-\tfrac{4}{3}y+8$

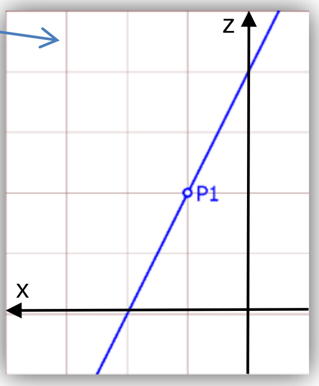
E_y: $y=3$

g_1: $z=-2x-\tfrac{4}{3}\cdot 3+8$ d. h. $z=-2x+4$

Diese gestrichelt eingezeichnete Schnittgerade verläuft einerseits in E, andererseits in der zur xz-Ebene parallelen Ebene E_y.

Projiziert man diese Gerade auf die xz-Ebene, erhält man dieses Schaubild:

Sie fällt in x-Richtung mit der **Steigung** $m_x=-2$.



Nun schneiden wir E mit der zur yz-Ebene parallelen Ebene E_x: x = 1 (ohne Abbildung):

E: $z=-2x-\tfrac{4}{3}y+8$

E_x: $x=1$

g_1: $z=-2\cdot 1-\tfrac{4}{3}y+8$ d. h. $z=-\tfrac{4}{3}y+6$.

Sie hat in der yz-Ebene die Steigung $m_y=-\tfrac{4}{3}$.

Beobachtung: In der Ebenengleichung $z=-2x-\tfrac{4}{3}y+8$ stellen $m_x=-2$ und $m_y=-\tfrac{4}{3}$ die Steigungen der Ebene in x- bzw. y-Richtung dar.

1. Ergebnis:

Hat eine Ebene die Funktionsgleichung $z = f(x,y) = ax + by + c$ **,**

dann ist a die Steigung der Ebene in x-Richtung und b die in y-Richtung.

Daher kann man diese Ebenengleichung auch so schreiben:

$$\boxed{z = f(x,y) = m_x x + m_y y + c} \qquad \textbf{(2)}$$

Herleitung der Punkt-Richtungs-Form einer Ebenengleichung:

Eine nicht zur y-Achse parallele Ebene kann als Funktion gemäß (2) dargestellt werden.

$$\boxed{z = m_x x + m_y y + c} \qquad \textbf{(3)}$$

Geht die Ebene durch den Ebenenpunkt $P_1(x_1 \mid y_1 \mid z_1)$, dann erfüllen seine Koordinaten die

Gleichung (3): $\qquad z_1 = m_x \cdot x_1 + m_y \cdot y_1 + c \qquad (4)$

Subtraktion: (3) - (4): $\qquad z - z_1 = m_x(x - x_1) + m_y(y - y_1)$

Daraus folgt: $\qquad z = m_x(x - x_1) + m_y(y - y_1) + z_1$

Ergebnis 2:

Geht eine Ebene durch den Punkt $P_1(x_1 \mid y_1 \mid z_1)$ und hat sie in x-Richtung bzw. in y-Richtung die Steigungen m_x bzw. m_y, dann kann man ihre Gleichung mit der Punkt-Richtungs-Form aufstellen:

$$z = m_x(x - x_1) + m_y(y - y_1) + z_1$$

Beispiel 2:

Eine Ebene hat in x-Richtung die Steigung 2 und in y-Richtung die Steigung -1.
Sie geht ferner durch $P(5 \mid 2 \mid 3)$. Dann lautet ihre Gleichung:

$$z = 2(x - 5) - (y - 2) + 3$$

Durch Umstellen erhält man daraus: $\quad 2x - y - z = 5$.

Anwendung:

Stellt $z = f(x \mid y)$ eine Fläche dar, dann kann man durch die sogenannten partiellen Ableitungen in x- bzw. y-Richtung die Steigung der Tangentialeben in einem Kurvenpunkt berechnen. Und wie im Beispiel 2 erhält man dann die Gleichung der Tangentialebene.

Dies wird später geübt.